L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Mai 2017

Révisions

Calcul Différentiel

Exercice 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions du système suivant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions du système suivant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| < 1$. Le jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$$

est-il inversible ?

Exercice 4. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 6. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$.

Exercice 8. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, g et h trois fonctions de $U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose que f et g sont différentiables en $a \in U$ et que $f(a) = h(a)$. Montrer que $d_a(h-f) = 0$. En déduire que g est différentiable en a et calculer $d_a g$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne et de sa norme euclidienne, $N(.) = \|.\|_2$.

1. Montrer que N est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = f(N(x))x$. Calculer la différentielle de F et montrer que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle DF(x).h, h\rangle \geqslant f(N(x))N(h)^2.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

1. Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels les dérivées partielles de f existent.
2. En déduire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels f est différentiable.

Suites et Séries de Fonctions

Exercice 11. La suite de fonctions $f_n(x) = x^{2n}\ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 12. La suite de fonctions $f_n(x) = nx^n\ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 13. La suite de fonctions

$$f_n(x) = n^2x^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^n}{2n+1}\right)$$

converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 14. Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'on n'a pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
2. Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ et montrer que l'on n'a pas convergence uniforme ni sur $[0,+\infty[$ ni sur $]0,+\infty[$.

Exercice 16. La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge-t-elle simplement $[0,+\infty[$? Uniformément ?

Exercice 17. On pose $u_n(x) = x^{n+1}\ln(x)$ si $x \in [0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ ne converge pas uniformément.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n(x)$ converge uniformément.

Exercice 18.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{x+n}{1+nx}\right)$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$.

Exercice 20. On considère les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0;\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sin(x)\cos^n(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_n : \begin{array}{rcl} [0;\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)\cos^n(x). \end{array}$$

1. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément ?
2. Etudier les convergences de la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Séries entières

Exercice 21. Soit $a > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{ch}(an)x^n$.
2. Calculer pour tout $|x| < R$ la somme totale $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(an)x^n$.

Exercice 22. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où $a_n = \int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 23. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \arctan(n^\alpha)\, z^n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln^n(n) z^n$.

Séries de Fourier

Exercice 26. Soit f une fonction T-périodique, continue, positive et non identiquement nulle. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) < a_0$.

Exercice 27. On définit D_N par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{inx}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \qquad D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 28. Soit $E = \left\{f \;:\; x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty\right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1([0,1], \mathbb{C})$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.
2. Montrer que $\|f\|_E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ définit une norme sur E et que $\|f\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|f\|_E$.

Exercice 29. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ prolongée en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 30. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^\pi \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} \cos(nx) \,\mathrm{d}x$.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une application $f : E \to F$ différentiable en $a \in E$.
2. Pour deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ différentiables sur E et F respectivement, donner la formule de la différentielle de la composée : $d_x(f \circ g)(h)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Exprimer la jacobienne de f.
5. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.
6. Écrire la définition d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
7. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
8. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
9. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
10. Donner la définition d'une suite de fonction vérifiant le critère de Cauchy uniforme.
11. Énoncer le théorème de comparaison de séries entières dont les termes généraux sont équivalents.
12. Énoncer le théorème d'Hadamard.
13. Exprimer le terme général du produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.
14. Quel est le rayon de convergence de la série entière dérivée ?
15. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
16. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
17. Énoncer l'inégalité de Bessel.
18. Énoncer le lemme de Riemann-Lebesgue.
19. Énoncer le théorème de Dirichlet.
20. Écrire l'égalité de Parseval avec les coefficients trigonométriques.

Le Pictionamaths

1. La nappe d'équation $z = (y-x)^2 + 3$
2. La nappe d'équation $z = x^2 + y^2 + 3$.
3. Une dérivée directionnelle
4. Une dérivée partielle
5. Un minimum local
6. Un minimum global
7. Un point selle
8. Une suite de fonction convergeant simplement
9. Une suite de fonctions ne convergeant pas simplement
10. Une suite de fonction convergeant uniformément
11. Une fonction périodique
12. Un polynôme trigonométrique
13. Une fonction différant au moins en un point de sa série de Fourier
14. Une fonction égale partout à sa série de Fourier
15. Un rayon de convergence